# THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 2

**Exercise 1.** *Exercice d'échauffement*

(1) Étant donné une arête $\{i, j\} \in X$, on observe qu'il existe une permutation $\sigma \in S_4$ telle que $\sigma \cdot \{1, 2\} = \{i, j\}$. Par conséquent, l'orbite de $\{1, 2\}$ est l'ensemble $X$ lui-même.

(2) Si une permutation dans $S_4$ stabilise $\{1, 2\}$, elle doit permuter les indices 1 et 2. Ainsi, nous avons

$$\mathrm{Stab}_{S_4}(\{1, 2\}) = \{e,\ (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}.$$

(3) En effet,

$$|S_4 \cdot \{1, 2\}||\mathrm{Stab}_{S_4}(\{1, 2\})| = |6| \cdot |4| = 24 = |S_4|.$$

**Exercise 2.** *Action sur les classes à gauche*
Notons l'application $G \times G/H \to G/H$ par $\Phi$. Notons $\Phi_g$ l'application

$$\begin{aligned} \Phi(g, -) : G/H &\to G/H \\ aH &\mapsto gaH \end{aligned}$$

(1)
— Tout d'abord, comme nous avons défini $\Phi_g$ en utilisant une représentation spécifique $aH$ d'une classe à gauche, nous devons montrer que $\Phi_g$ est bien définie. Nous devons montrer que pour tout $a, b \in G$ tels que $aH = bH$, leurs images vérifient $\Phi_g(aH) = \Phi_g(bH)$. Cela est vrai car

$$\begin{aligned} \Phi_g(aH) &= (ga)H = \{(ga)h \mid h \in H\} \\ &= \{g(ah) \mid h \in H\} \\ &= \{g(bh') \mid h' \in H\} \\ &= \{(gb)h' \mid h' \in H\} \\ &= (gb)H = \phi_g(bH) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse $aH = bH$ à la troisième ligne.

— Nous observons que $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \mathrm{Id}_{G/H}$ et $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \mathrm{Id}_{G/H}$, ce qui prouve que $\Phi_g$ est bijective avec l'inverse $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$, comme souhaité.

— Enfin, nous prouvons que pour tous $g, g' \in G$, nous avons $\Phi_{gg'} = \Phi_g \circ \Phi_{g'}$. C'est un calcul simple :

$$\Phi_{gg'}(aH) = gg'aH = \Phi_g(g'aH) = (\Phi_g \circ \Phi_{g'})(aH).$$

(2) Par définition,

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_G(gH) &= \{g' \in G \mid \Phi_{g'}(gH) = gH\}\\ &= \{g' \in G \mid g'gH = gH\}\\ &= \{g' \in G \mid g^{-1}g'gH = H\}\\ &= \{g' \in G \mid g^{-1}g'g \in H\}\\ &= \{g' \in G \mid g' \in gHg^{-1}\} = gHg^{-1}.\end{aligned}$$

**Exercise 3.** Supposons d'abord que $K$ et $H$ sont des sous-groupes conjugués de $G$ avec $K = gHg^{-1}$ pour un certain $g \in G$ fixé. Nous définissons un morphisme de $G$-ensembles comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi : G/K &\to G/H\\ aK &\mapsto agH.\end{aligned}$$

Comme dans l'exercice précédent, nous devons montrer que $\varphi$ est bien définie. À cette fin, supposons que $aK = bK$. Cela équivaut à dire que $b^{-1}a \in K$. Nous devons montrer $agH = bgH$. Cela équivaut à $g^{-1}b^{-1}ag \in H$, ce qui est vrai puisque $b^{-1}a \in K$ et $g^{-1}Kg = H$. De plus, c'est un morphisme de $G$-ensembles car

$$\begin{aligned}\varphi(g' \cdot aK) = \varphi(g'aK) &= (g'ag)H\\ &= g' \cdot (agH) = g' \cdot \varphi(aK).\end{aligned}$$

Nous définissons maintenant son inverse

$$\begin{aligned}\psi : G/H &\to G/K\\ aH &\mapsto ag^{-1}K.\end{aligned}$$

En utilisant un argument similaire, nous pouvons montrer que $\psi$ est bien définie et que c'est un morphisme de $G$-ensembles. Il est clair que $\varphi$ et $\psi$ sont inverses l'un de l'autre, prouvant la réciproque.

Inversement, supposons que $\phi : G/H \to G/K$ est un isomorphisme de $G$-ensembles. Il existe $g \in G$ tel que $\phi(H) = gK$. Nous visons à montrer que $K = gHg^{-1}$. Comme $\phi$ est bien définie, nous avons que

$$gK = \phi(H) = \phi(h^{-1}H) = h^{-1}\phi(H) = h^{-1}gK$$

pour tout $h \in H$. Ainsi $ghg^{-1} \in K$ pour tout $h \in H$ et donc $gHg^{-1} \subseteq K$. D'autre part, $\phi(H) = gK$ implique que $\phi^{-1}(K) = g^{-1}H$. En utilisant le même argument pour $\phi^{-1}$ et $g^{-1}$, nous obtenons que $g^{-1}Kg \subseteq H$, ce qui montre que $K = gHg^{-1}$.

**Exercise 4.** (1) Nous définissons une application $\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ par $g \mapsto \Phi_g$, où $\Phi_g(W) = g(W)$ pour tout $W \in X$. Tout d'abord, prouvons que l'application est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, $\Phi_g$ est une bijection sur $X$. En effet, comme $g$ est un automorphisme, il existe $g' \in G$ tel que $g \circ g' = g' \circ g = e_G$, où $e_G$ est l'élément neutre de $G$, c'est-à-dire $e_G = \mathrm{id}_V$. Nous pouvons alors vérifier que $\Phi_g \circ \Phi_{g'} = \Phi_{g'} \circ \Phi_g = \mathrm{id}_X$ pour conclure que $\Phi_g$ est une bijection. Il est simple de vérifier que $\Phi_{\mathrm{id}_V} = \mathrm{id}_X$. De même, pour tout $g, g' \in G$ et $W \in X$, $(g \circ g')(W) = g(g'(W))$ par définition des compositions d'applications, ce qui nous donne $\Phi_{gg'} = \Phi_g \circ \Phi_{g'}$. Nous concluons que $\Phi$ est une action.

(2) Prouvons que pour tout $W, W' \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g(W) = W'$ pour conclure que l'action est transitive. Considérons $\{v_1, v_2\}$ une base de $W$ que nous complétons en une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $V$. De même, considérons $\{w_1, w_2\}$ une base de $W'$ que nous complétons en une base $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $V$. L'application linéaire définie par $g : V \to V$, $v_1 \mapsto w_1$, $v_2 \mapsto w_2$, $v_3 \mapsto w_3$ est surjective et donc bijective (et donc un isomorphisme) par le théorème du noyau-image. Il est clair par définition que $g(W) = W'$, donc nous avons terminé.

(3) Par le point (2), pour tout $W \in X, |O_W| = |X|$. Fixons un tel $W$. Nous savons que

$$|O_W| = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(W)|}.$$

De plus, nous savons que $G$ est le sous-groupe des matrices inversibles de $M_3(\mathbb{F}_2)$ et donc que $|G| = (2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 4) = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ (vous avez vu cela en algèbre linéaire). Trouvons maintenant $|\mathrm{Stab}_G(W)|$ pour conclure. Considérons $\{v_1, v_2\}$ une base de $W$ que nous complétons en une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ pour $V$. Si $g \in G$ fixe $W$, nous devons avoir $g(v_1), g(v_2) \in W$ linéairement indépendants. Il y a 6 tels choix. Maintenant, les choix définissant un tel isomorphisme linéaire $g$ lorsque $g(v_1)$ et $g(v_2)$ sont fixés se résument aux choix de l'image de $v_3$ telle qu'elle ne soit pas contenue dans $W$. Il y a $|V| - |W| = 4$ de ces choix, donc nous concluons que $|\mathrm{Stab}_G(W)| = 6 \cdot 4 = 24$ et que $|X| = \frac{168}{24} = 7$.

**Exercise 5.** (1) Le théorème de l'orbite-stabilisateur donne :

$$|G \cdot 1||\mathrm{Stab}_G(1)| = |G|.$$

Comme l'action est transitive, il n'y a qu'une seule orbite de l'action et donc $|G \cdot 1| = n$. Par conséquent, $n \mid |G|$.

(2) Nous laissons au lecteur de vérifier que la conjugaison définit une action sur l'ensemble des sous-groupes de $G$.

Nous avons que

$$\mathrm{Stab}_G(H) = \{g \in G \,|\, gHg^{-1} = H\}.$$

Le groupe ci-dessus, $\mathrm{Stab}_G(H)$, est connu sous le nom de normalisateur de $H$ dans $G$, souvent noté $N_G(H)$. Notez que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de $G$ qui contient $H$ comme sous-groupe normal.

**Exercise 6.** Nous procédons par contradiction. Supposons que pour tout $x \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x \neq x$. Cela signifie précisément que tous les stabilisateurs $\mathrm{Stab}_G(x)$ sont des sous-groupes stricts de $G$, et donc ont une cardinalité $|\mathrm{Stab}_G(x)| = p^{k_x} < p^n$ pour certains $0 \leq k_x < n$. Soit $\tilde{X}$ un ensemble de représentants des orbites. Par une formule vue en cours, nous avons :

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{x\in\tilde{X}} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(x)|} \\ &= \sum_{x\in\tilde{X}} \frac{p^n}{p^{k_x}} \\ &= p\cdot\sum_{x\in\tilde{X}} \frac{p^{n-1}}{p^{k_x}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $p||X|$. Cela contredit l'hypothèse et donc il doit exister $x \in X$ tel que son stabilisateur soit $G$, c'est-à-dire tel que $g\cdot x = x$ pour tout $g \in G$.